Exercices Nombres Complexes

B1020 - Pont vers le supérieur : mathématiques

Ruben Hillewaere
Exercices issus du syllabus de L. Zandarin et autres ouvrages
ECAM, Haute Ecole ICHEC-ECAM-ISFSC

Octobre 2020

Chapitre 1

Nombres complexes : énoncés

Voir réponses

[IX-2] 1. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

(a) $z = -1 + i\sqrt{3}$

(b) $z = 4$

(c) $z = -3i$

[IX-4] 2. Soient les nombres complexes $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = 2 + 5i$. Calculer :

(a) $3z_1 - 2z_2$

(b) $z_1\overline{z_1}$

(c) $|z_1|$

(d) $\dfrac{1}{(\overline{z_2})}$

(e) $z_1 z_2$

(f) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(g) z_2^2

[IX-6] 3. Calculer et mettre la réponse sous forme algébrique :

(a) $\dfrac{1-i}{\left(\overline{-3-3i}\right)}$

(b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^9$

[IX-8] 4. Tourner les vecteurs suivants :

(a) $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ de $-\frac{\pi}{3}$

(b) $z = -3 + i\sqrt{3}$ de $\frac{\pi}{4}$

[IX-10] 5. Calculer $y = \dfrac{x^{12} + 2x + \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}}$ si $x = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}$

[IX-12] 6. Résoudre les équations suivantes et représenter les racines dans le plan complexe :

(a) $z^5 = -1 + i$

(b) $z^2 = -i$

[IX-14] 7. Résoudre les équations suivantes :

(a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$

(b) $z^3 + 8 = 0$
(c) $z^4 + 3z^2 + 4 = 0$
(d) $z^6 = -1$
(e) $(1-i)z^2 - (3-i)z + 2 = 0$

[Interro 02/2011] 8. Soit $z = 2\sqrt{3} - 2i$ un nombre complexe.

(a) Trouver l'inverse multiplicative de z, c.-à-d. trouver z_1 pour que $z \cdot z_1 = 1$.
(b) Calculer $|e^z|$. *Indice : posez-vous d'abord la question suivante : que vaut* $\left|\rho e^{i\varphi}\right|$ *?*
(c) Calculer $z^3 + (\overline{z})^3$.
(d) Dans le plan complexe, faire tourner le vecteur z de $\pi/2$.

Ecrire les réponses de (a) et (d) sous forme algébrique et exponentielle.

[Interro 02/2011] 9. Donner les formules d'Euler. En utilisant ces formules, montrer que

$$2\cos\varphi = z + \frac{1}{z}$$

en sachant que $|z| = 1$.

[Examen 06/2011] 10. Dans le plan complexe, déterminer tous les points $z = x + iy$ tels que $\dfrac{z-i}{z-1}$ soit un imaginaire pur non nul.

[Interro 03/2012] 11. *Dans cette question, vous allez trouver la valeur de* $\cos\frac{2\pi}{5}$*, étape par étape. Même si vous ne trouvez pas une des étapes, vous pouvez l'utiliser pour la suite de l'exercice.*

Soit $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

(a) Montrer que z_0 est une racine cinquième de l'unité.
(b) Représenter $1, z_0, z_0^2, z_0^3$ et z_0^4 dans le plan complexe, et en déduire que

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0.$$

Justifier votre réponse.

(c) On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$. Montrer que α et β sont solutions de l'équation

$$X^2 + X - 1 = 0.$$

(d) Déterminer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
(e) Résoudre l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

[Examen 06/2012] 12. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts et soit $z = (1-t)z_1 + tz_2$ avec t un nombre réel avec $0 < t < 1$. Les identités suivantes sont-elles correctes ou fausses ? Motiver chaque réponse !

(a) $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2|$

(b) $\arg(z - z_1) = \arg(z - z_2)$

(c) $\arg(z - z_1) = \arg(z_2 - z_1)$

(d) $\begin{vmatrix} z - z_1 & \overline{z} - \overline{z}_1 \\ z_2 - z_1 & \overline{z}_2 - \overline{z}_1 \end{vmatrix} = 0$

[Examen 06/2013] 13. Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z(1+i)) + z\overline{z} = 0$.

Chapitre 2

Nombres complexes : réponses

Voir énoncés

1. (a) $z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)}$
   (b) $z = 4e^{i.2k\pi}$
   (c) $z = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)}$
2. (a) $-10 - i$
   (b) 13
   (c) $\sqrt{13}$
   (d) $\frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$
   (e) $-19 - 4i$
   (f) $\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$
   (g) $-21 + 20i$
3. (a) $-\frac{1}{3}$
   (b) $-i$
4. (a) $z = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}$
   (b) $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
5. $1 - i$
6. (a) $z_k = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$; racines forment un pentagone régulier)
   (b) $z_k = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)}$, donc $z_0 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ($k = 0, 1$; racines forment un digone)
7. (a) $z = i$ ou $z = -3i$
   (b) $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ ($k = 0, 1, 2$; triangle), soit $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = -2$ et $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$
   (c) $z_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, $z_2 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$, $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $z_4 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$
   (d) $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; hexagone)
   (e) $z = 1 + i$ ou $z = 1$
8. Tout d'abord, $z = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{i(-\pi/6+2k\pi)}$.

(a) $z \cdot z_1 = 1 = e^{i.2k\pi}$ si $z_1 = \frac{1}{4}e^{i(\pi/6+2k\pi)} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$

(b) $|e^z| = \left|e^{2\sqrt{3}}e^{-2j}\right| = e^{2\sqrt{3}}.\left|e^{-2i}\right| = e^{2\sqrt{3}}$

(c) $z^3 + (\overline{z})^3 = 4^3e^{i(-\pi/2+2k\pi)} + 4^3e^{i(\pi/2+2k\pi)} = -4^3i + 4^3i = 0$

(d) $z_r = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

9. Les formules d'Euler :

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \text{ et } \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Vu que le module de z vaut 1 ($|z| = 1$), on peut écrire $z = e^{i\varphi}$, donc :

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi.$$

10. $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un imaginaire pur non nul si sa partie réelle est zéro, $z \neq i$ et $z \neq 1$.

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{x+(y-1)i}{(x-1)+yi} = \frac{(x+(y-1)i)((x-1)-yi)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x(x-1)+y(y-1)+(\ldots)i}{(x-1)^2+y^2}$$

donc la partie réelle est zéro si

$$x(x-1)+y(y-1) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

ce qui représente un cercle avec rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (sans les points $z = 1$ et $z = i$!).

11. $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

(a) $z_0^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi} = 1$

(b) Les arguments de $1, z_0, z_0^2, z_0^3$ et z_0^4 sont respectivement les angles $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$. Ils forment donc un pentagone régulier et leur somme vectorielle est le vecteur nul, comme illustré sur Figure 2.1.

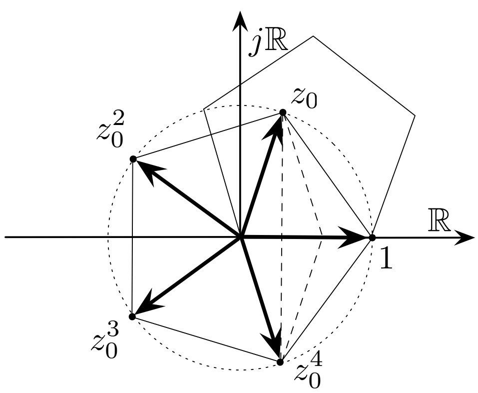

Figure 2.1

(c) $\alpha = z_0 + z_0^4$, donc

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = (z_0^2 + 2z_0z_0^4 + z_0^8) + (z_0 + z_0^4) - 1 = z_0^2 + 2 + z_0^3 + z_0 + z_0^4 - 1 = 0$$

en utilisant point (b). Idem pour $\beta = z_0^2 + z_0^3$, on a :

$$\beta^2 + \beta - 1 = (z_0^4 + 2z_0^2z_0^3 + z_0^6) + (z_0^2 + z_0^3) - 1 = z_0^4 + 2 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 - 1 = 0$$

(d) $\alpha = z_0 + z_0^4 = z_0 + z_0^* = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ (voir dessin).

(e) Le discriminant de $X^2 + X - 1 = 0$ est $\Delta = \sqrt{5}$, donc $X = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $X = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, donc $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ ou pour finir

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

12. (a) Calculons d'abord

$$\begin{aligned} z - z_1 &= (1-t-1)z_1 + tz_2 = t(z_2 - z_1) \\ z - z_2 &= (1-t)z_1 + (t-1)z_2 = (1-t)(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |z - z_1| + |z - z_2| &= |t(z_2 - z_1)| + |(1-t)(z_1 - z_2)| \\ &= |t|.|z_2 - z_1| + |1-t|.|z_1 - z_2| \\ &= t|z_1 - z_2| + (1-t).|z_1 - z_2| \qquad \text{car } |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| \\ &= |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

donc la première identité est vraie.

(b) $\arg(z - z_1) = \arg(z - z_2)$ est vrai si et seulement si

$$\arg(t(z_2 - z_1)) = \arg((1-t)(z_1 - z_2)) = \arg((t-1)(z_2 - z_1))$$

Puisque $t > 0$ et $t - 1 < 0$ les vecteurs correspondants aux nombres complexes $t(z_2 - z_1)$ et $(t-1)(z_2 - z_1)$ ont la même direction mais pas le même sens, donc les deux arguments diffèrent de π et l'affirmation est fausse.

(c) Ceci est vrai puisque le facteur t ne change que le module du vecteur $z_2 - z_1$, il n'affecte pas la direction ni le sens.

(d) $\begin{vmatrix} z - z_1 & \overline{z} - \overline{z}_1 \\ z_2 - z_1 & \overline{z}_2 - \overline{z}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t(z_2 - z_1) & t(\overline{z}_2 - \overline{z}_1) \\ z_2 - z_1 & \overline{z}_2 - \overline{z}_1 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1)\begin{vmatrix} t & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

L'identité est donc vraie.

13. On pose $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z(1+i)) + z\overline{z} &= \mathrm{Re}((x+iy)(1+i)) + (x+iy)(x-iy) \\ &= \mathrm{Re}(x - y + (x+y)i) + x^2 + y^2 \\ &= x - y + x^2 + y^2 \\ &= \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc les nombres complexes qui valident $\mathrm{Re}(z(1+i)) + z\overline{z} = 0$ se trouvent sur un cercle avec équation

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$